PISA

Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes

MATEMÁTICA

PROGRAMA DE CAPACITACIÓN Y SENSIBILIZACIÓN

MÓDULO 2

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

DiNIECE
Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa

PISA
Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes

MATEMÁTICA

PROGRAMA DE CAPACITACIÓN Y SENSIBILIZACIÓN

MÓDULO 2

AUTORIDADES

Presidenta de la Nación
Dra. CRISTINA FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

Ministro de Educación
Prof. ALBERTO ESTANISLAO SILEONI

Secretario de Educación
LIC. JAIME PERCZYK

Subsecretaria de Planeamiento Educativo
PROF. MARISA DÍAZ

Directora Nacional de Información
y Evaluación de la Calidad Educativa
Dra. LILIANA PASCUAL

DOCUMENTO ELABORADO POR EL DEPARTAMENTO DE EVALUACIÓN DE LA DINIECE

DEPARTAMENTO DE EVALUACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA
Mg. Mariela Leones

ÁREA TÉCNICO-PEDAGÓGICA
Lic. Patricia Scorzo
Prof. Jorge Novello
Dra. Viviana Vega

ÁREA DE MATEMÁTICA
Prof. Liliana Bronzina
Prof. Pilar Varela
Lic. Nora Burelli
Prof. Andrea Novembre

ÁREA DE LENGUA
Prof. Beba Salinas
Lic. Andrea Baronzini
Prof. Graciela Piantanida
Lic. Carmen de la Linde
Prof. Graciela Fernández

ÁREA DE CIENCIAS SOCIALES
Prof. Amanda Franqueiro
Prof. Andrés Nussbaum
Prof. Ana Lamberti

ÁREA DE CIENCIAS NATURALES
Mg. Elizabeth Liendro
Prof. Norma Mustacciuoli
Lic. Florencia Carballido
Lic. Evangelina Indelicato

ASISTENCIA TÉCNICO-PEDAGÓGICA
Prof. Natalia Rivas

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:
Karina Actis
Juan Pablo Rodriguez
Coralia Vignau

ÍNDICE

Estimados/as Docentes:

En este Material de trabajo del área de Matemática se hará hincapié en la resolución problemática, y en los procesos de matematización como parte del enfoque de trabajo que propone el Estudio PISA.

Por tanto, en este ***Segundo Módulo*** *podrá encontrar:*

- *una síntesis del marco teórico específico de Matemática del Estudio PISA.*
- *un conjunto de ítems que permitirá profundizar las estrategias para resolver las dificultades propias de cada una de las áreas.*
- *los criterios de corrección que son utilizados.*

Confiamos en que este documento pueda resultar de utilidad para el trabajo conjunto entre docentes y estudiantes y, tanto como sea posible, que se pueda contar con el apoyo y colaboración de las familias.

Auguramos que esta propuesta de trabajo pueda constituirse en un aporte que enriquezca sus prácticas de enseñanza, al tiempo que posibilite a los estudiantes transitar en mejores condiciones la próxima evaluación del Estudio PISA.

Finalmente agradecemos la participación de todos los que están comprometidos en esta tarea.

INTRODUCCIÓN

En este módulo fijamos nuestra atención en la capacidad cognitiva de resolución de problemas y específicamente en las actividades o proceso de matematización que el Estudio PISA propone como parte de su enfoque de trabajo.

Desarrollaremos qué se entiende por proceso de matematización y proporcionaremos ejemplos de cómo se pone en juego en la resolución de algunos problemas que hemos seleccionado para tal fin.

A continuación mostramos varios ejemplos de actividades que han sido usadas en estudios PISA anteriores y que ahora se han liberado[1] para uso de los docentes y estudiantes.

Junto con las actividades propuestas podrán encontrar las respuestas. Estas respuestas se muestran de acuerdo al modo en que se realiza la corrección, clasificándolas en respuesta correcta, respuesta parcialmente correcta, respuesta incorrecta y respuesta omitida.

I. ¿QUÉ EVALÚA PISA EN MATEMÁTICA?

PISA evalúa a alumnos de 15 años en su capacidad para utilizar sus conocimientos y comprensión matemática para resolver cuestiones que los ciudadanos tienen que enfrentar, tareas que involucran conceptos matemáticos de diversos tipos, cuantitativos, espaciales, de probabilidad y de cambio entre otros.

Los periódicos, revistas, televisión, internet, nos abruman con información que dan en forma de tablas, gráficos, diagramas sobre el tiempo, economía, salud, población, turismo, etc. De la misma manera la vida en sociedad nos exige leer formularios, interpretar horarios de ómnibus, realizar operaciones bancarias, decidir qué producto conviene más, cuál es la mejor oferta, etc.

Nuestro objetivo en este módulo es comunicar un modo de trabajo posible que facilite la actividad de resolución de problemas más o menos complejos.

[1] Las pruebas y problemas Pisa constituyen un material confidencial. Los problemas liberados son los que Pisa decide mostrar –y por lo tanto no vuelve a usar- a docentes y alumnos con el objetivo de que conozcan la modalidad que adquiere esta evaluación.

II. ACERCA DE LA MATEMATIZACIÓN DE UNA SITUACIÓN

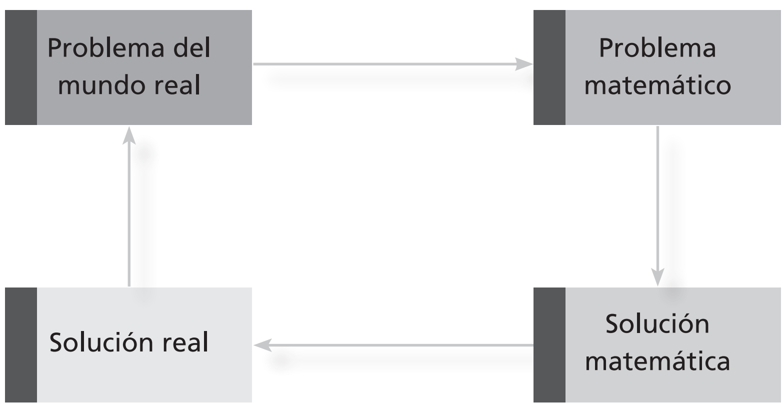
La prueba PISA contiene situaciones problemáticas en contextos reales.
El proceso a través del cual los alumnos buscan y ensayan estrategias de resolución para los problemas es llamado matematización en el marco teórico de PISA.

¿Qué involucra este proceso de matematización o modelización? Ciertamente se trata de una práctica que no resulta natural a los alumnos y que, por lo tanto, requiere ser enseñada.

"*En la enseñanza de la resolución de problemas no solo es importante enseñar a los alumnos a encontrar diferentes estrategias de resolución, sino que también es esencial que adquieran práctica en la traducción matemática de la situación. No hablamos de la obtención de una ecuación porque no es una condición necesaria, pero siempre es preciso que los alumnos logren hacer algún tipo de traducción que permita matematizar la situación*".

Dicho de manera esquemática, se presenta una situación a resolver a un alumno, quien intenta sistematizarla según sus conocimientos matemáticos, es decir buscar dentro de sus conocimientos cuáles pueden ser pertinentes para resolver el problema planteado. Esto permite transformar el problema real en uno matemático, que deberá resolverse. Las soluciones halladas tendrán que ser interpretadas en función del contexto para analizar su pertinencia.

La actividad de matematizar se representa en el siguiente gráfico



Si bien en el gráfico las flechas marcan relaciones en un solo sentido, en la práctica sucede que el proceso de resolución de problemas tiene idas y vueltas. No es raro hallar soluciones que, una vez contrastadas con el contexto del problema se muestran incorrectas y llevan a revisar lo hecho.

[2] Recomendaciones Metodológicas para la Enseñanza, Matemática, Educación Secundaria, ONE 2010, DiNIECE, Ministerio de Educación, 2011.

III. EJEMPLOS DE ÍTEMS

En este apartado presentamos ejemplos de problemas y analizamos qué tipos de conocimientos se pueden poner en juego al resolverlos.

Ejemplo 1: EL FAROL

EL FAROL

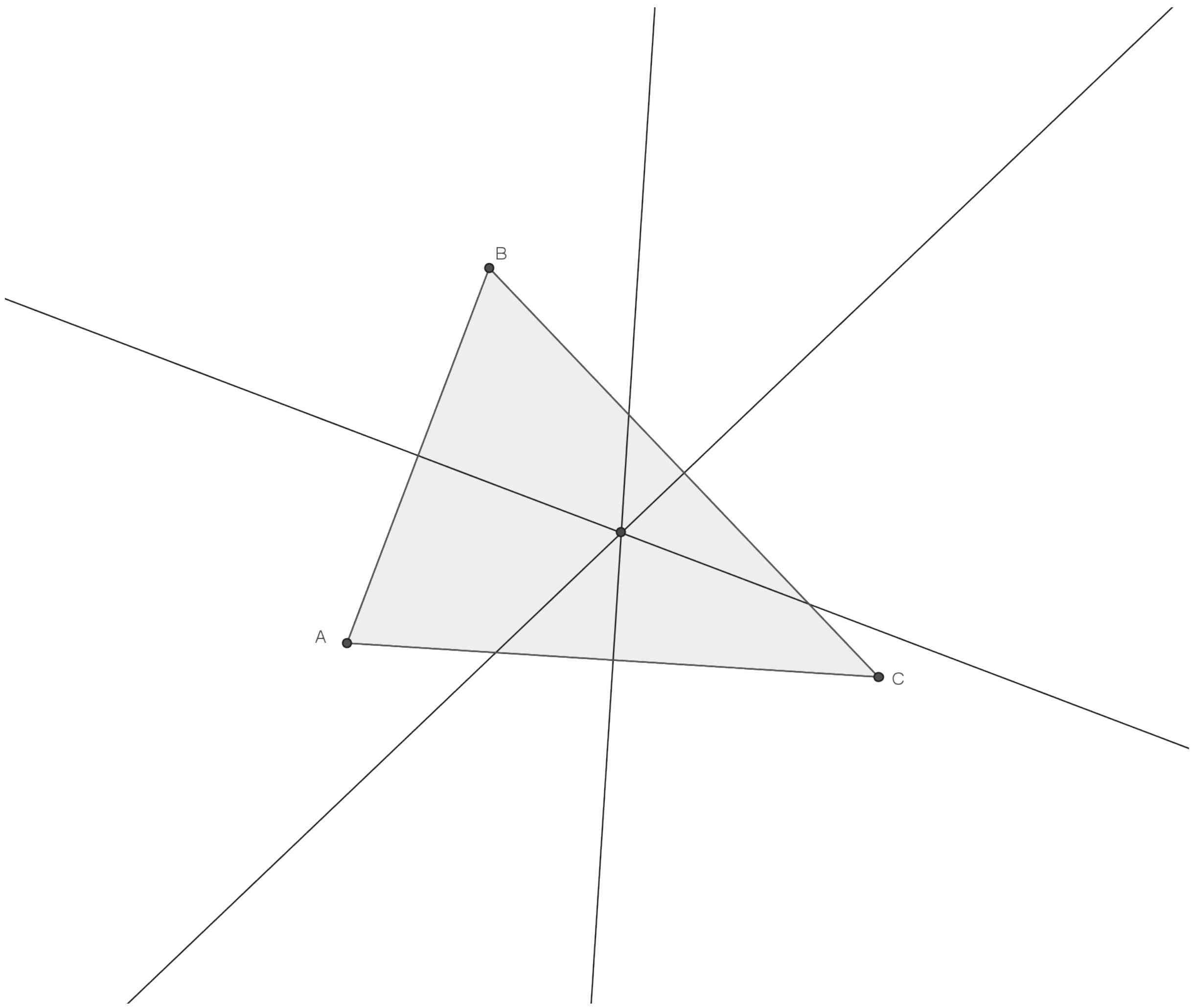
La Municipalidad ha decidido colocar un farol en una pequeña plaza triangular para que alumbre la plaza en su totalidad.

¿Dónde deberá colocarse?

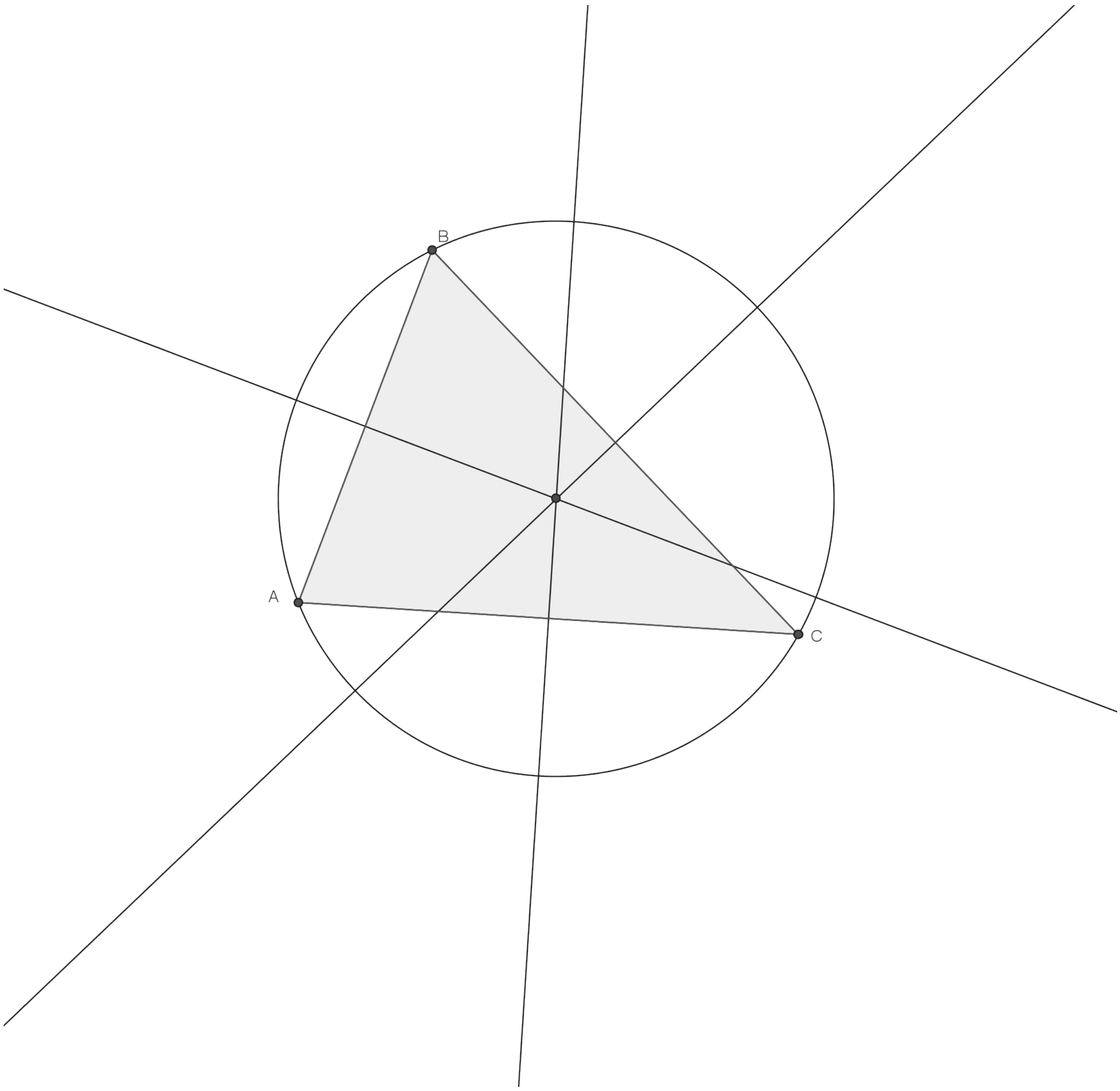
La modelización de este problema a través de la matemática precisa de conocimientos geométricos.

Si se considera que la zona iluminada está representada por un círculo cuyo centro es la posición del farol, el problema consiste en hallar la posición del centro y el radio de la circunferencia en cuestión.

Si se busca la circunferencia de radio mínimo, se trata de hallar un punto que esté a la misma distancia de cada uno de los vértices del triángulo. El conjunto de puntos que equidistan de otros dos constituyen la mediatriz del segmento formado por los dos puntos dados. Luego, el centro de la circunferencia buscada será la intersección de las tres mediatrices.

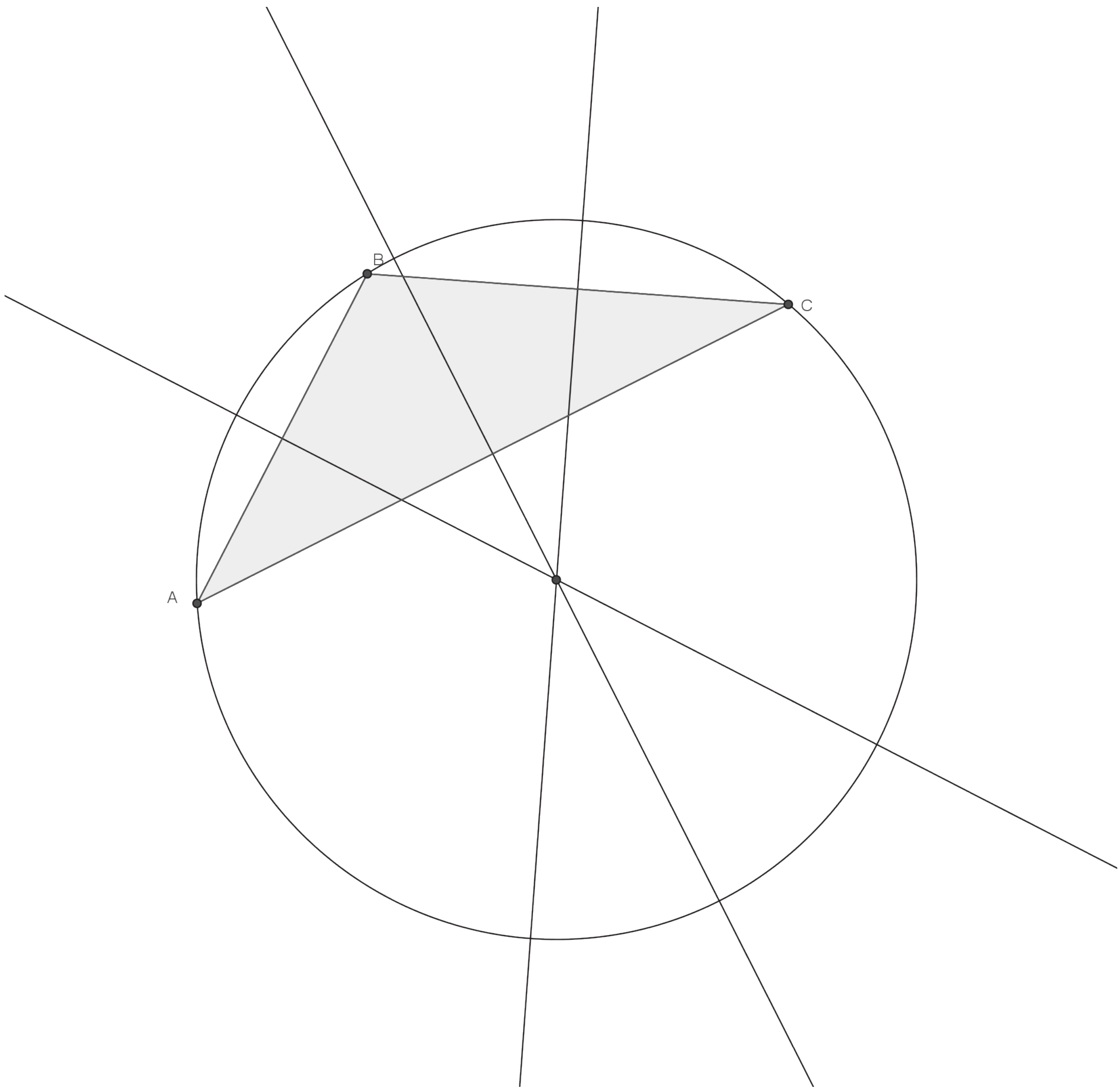


El radio es la distancia entre el centro y un vértice del triángulo.



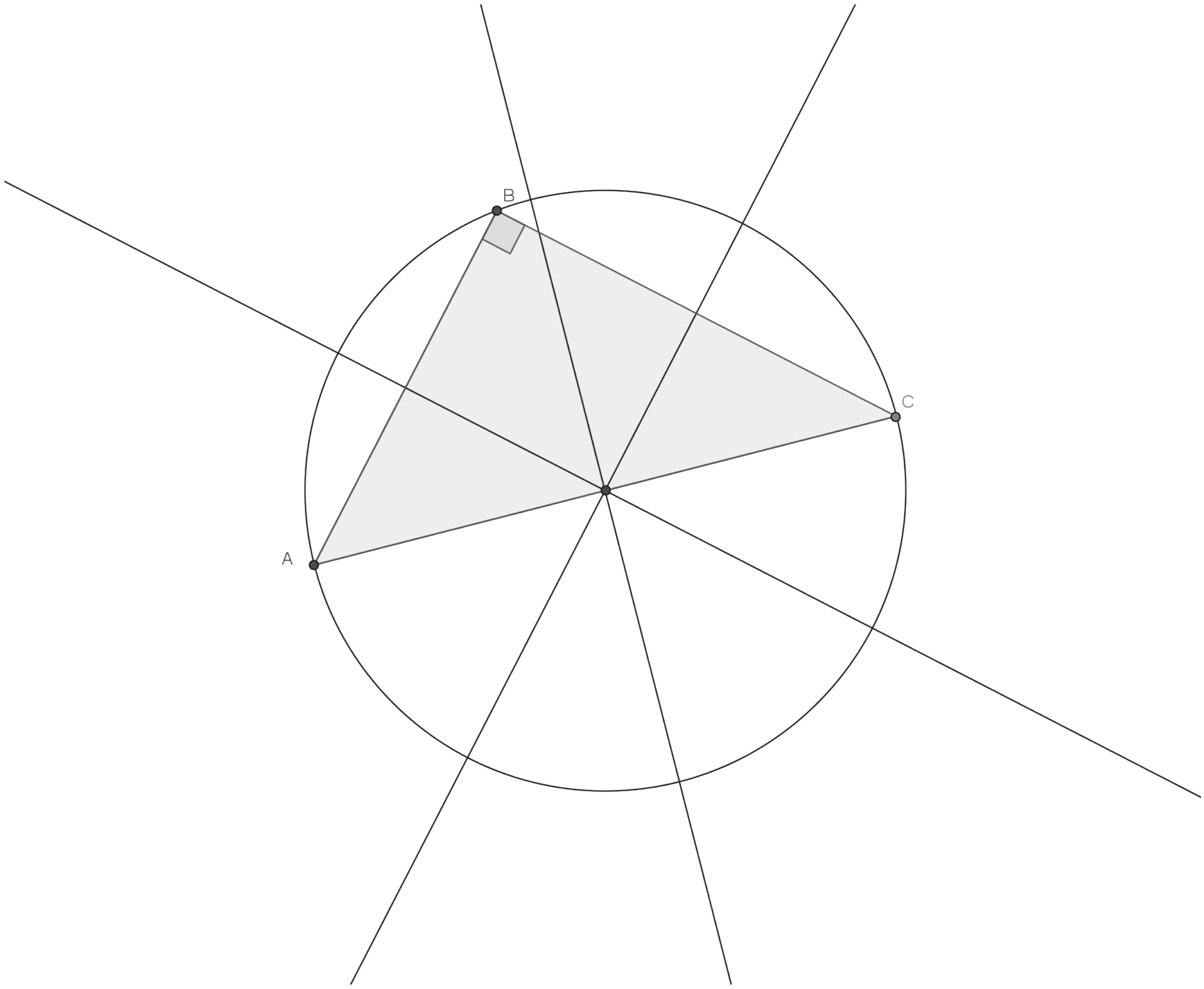
A partir del análisis hecho podríamos decir que el farol debe ubicarse en el punto que corresponde a la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. La intensidad de la luz debe ser tal que la zona iluminada pueda pensarse como un círculo de radio la distancia entre el centro y cualquiera de los vértices. Ahora bien, en nuestro desarrollo propusimos como figura de análisis un triángulo acutángulo. ¿Qué hubiera sucedido si el triángulo hubiera sido obtusángulo o rectángulo? Es decir, ¿podemos estar seguros de que la solución encontrada no difiere al cambiar el tipo de triángulo considerado?

En el siguiente dibujo se muestra el caso de un triángulo obtusángulo:



Aquí puede verse que el farol quedaría ubicado fuera de la plaza, lo cual no tiene sentido para el problema planteado.

Cuando el triángulo considerado es rectángulo, el centro de la circunferencia es un punto de la hipotenusa. Teniendo en cuenta el contexto del problema, esto significa que el farol estaría sobre un lado de la plaza.



En todos los casos hemos considerado la solución “mínima”, es decir el radio de la circunferencia cuya medida es la distancia entre el centro (posición del farol) y uno de los vértices del triángulo. Pero es claro que cualquier otra circunferencia con el mismo centro y un radio mayor que esa distancia también sirve.

Otra cuestión sobre la que es importante prestar atención es la influencia que impone un contexto al razonamiento que se desarrolla. Muchos alumnos encuentran soluciones que provienen de la lógica de lo cotidiano en lugar de la lógica matemática, pero que responden al problema. Por ejemplo, no sería raro que un alumno responda que el farol puede ubicarse en cualquier lugar de la plaza y que hay que asegurarse de conseguir una fuente de luz lo suficientemente potente que permita que toda la plaza quede iluminada. Se trata, claramente, de una solución válida al problema que no utiliza ningún concepto matemático. También es posible que haya estudiantes que planteen que la plaza puede tener árboles que tapen la luz, con lo cual solo puede resolverse el problema empíricamente. O también pueden plantearse como un problema la altura a la cual hay que poner el farol para que se logre iluminar la plaza. Para que la matemática pueda responder al problema es necesario plantear ciertas restricciones. En este caso, es necesario suponer que la plaza es un triángulo no obtusángulo, que no tiene árboles que tapen la luz y que la altura del farol es la necesaria, entre otras.

Creemos que no solo es interesante debatir en clase acerca de los modos matemáticos de resolver un problema, sino también analizar las restricciones y condiciones que se plantean.

Ejemplo 2: PIZZAS

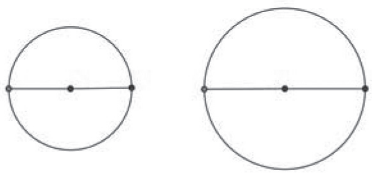
Proponemos el análisis de este segundo ejemplo.

PIZZAS

Una pizzería ofrece dos pizzas redondas del mismo grosor y de diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 30 zeds. La más grande tiene un diámetro de 40 cm y cuesta 40 zeds.

¿Qué pizza es la mejor opción en relación con lo que cuesta? Justificá matemáticamente tu respuesta

Las pizzas pueden representarse a través de círculos de 30 y 40 cm de diámetro. Es importante que los alumnos comprendan que al hacer esta suposición, se eliminan las diferencias entre, por ejemplo, la densidad, las imperfecciones, etc.



Si bien hay una relación de proporcionalidad directa entre el diámetro de la pizza y el precio $\left(\dfrac{30\ cm}{30\ zeds} = \dfrac{40\ cm}{40\ zeds}\right)$, no son estas las magnitudes a comparar para decidir cuál pizza conviene comprar.

Como se espera que los alumnos consideren al diámetro y el precio para decidir, es necesario proponer un debate en torno al criterio para determinar la conveniencia de una u otra pizza. Se trata de llegar a un primer acuerdo: es necesario comparar las áreas con los precios correspondientes.

A partir de aquí surge un nuevo problema. Las magnitudes a considerar, ¿son proporcionales?
Si bien es cierto que cuando una variable crece, la otra también, no se trata de magnitudes directamente proporcionales.

¿Cuál sería entonces una posible forma de resolverlo?

Si suponemos que el precio varía en forma directamente proporcional al área del círculo, el precio de la pizza de 40 cm de diámetro debiera ser:

$$\frac{30\ zeds}{x} = \frac{\pi.15^2}{\pi.20^2} \rightarrow x = 53{,}3\ldots \text{ zeds}$$

Es decir, si la relación entre los precios y las áreas fueran las mismas, entonces la pizza de 40 cm de diámetro debería costar 53,33 zeds aproximadamente. Como su costo es de 40 zeds, conviene comprar ésta.

Este problema pone a los alumnos en situación de tener que tomar varias decisiones: acerca de las variables a considerar, sobre la relación que existe entre ellas, qué aspecto tener en cuenta para decidir cuál de las dos pizzas conviene comprar, etc.

Ejemplo 3: CONCIERTO DE ROCK

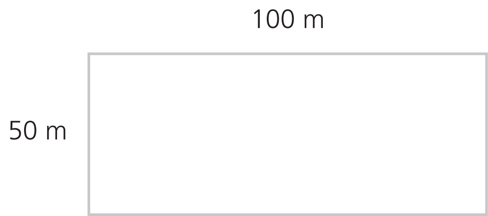
CONCIERTO DE ROCK

Para un concierto de rock, se reservó un área rectangular de 100 m x 50 m para el público. Las entradas para el concierto se agotaron, y el sitio estaba lleno, con todos los fans de pie.

¿Cuál de las siguientes podría ser la mejor estimación del número total de personas asistentes al concierto?

A. 2.000
B. 5.000
C. 20.000
D. 50.000
E. 100.000

El terreno puede representarse a través de un rectángulo de 100 m por 50 m.



Pero, a partir de los datos que proporciona el problema, no resulta simple darse cuenta si hay algún cálculo para hacer, si hay información que se omitió.

Se trata de un problema de estimación, pero ¿cuáles son los conocimientos necesarios para poder estimar la cantidad de personas que pueden entrar paradas en un terreno como el descripto en el problema?

Una forma de resolver problemas de opción múltiple como este, consiste en analizar la factibilidad de cada una de las opciones. Si se divide el área de la zona destinada al público por la cantidad de personas, se obtiene el área que ocupa cada persona.

La opción A (2.000 personas) implica que cada persona ocupa 5.000 m^2/2.000 = 2,5 m^2, que es una zona demasiado amplia para una sola persona. De ser esta la respuesta, el terreno no estaría lleno.

Para la opción E resulta que cada persona ocupa un área de 5.000 m^2/100.000 personas = 0,05 m^2. Si este fuera el caso, habría 20 personas por metro cuadrado, lo cual no resulta posible.

La opción D se descarta por la misma razón, pues en este caso habría 5.000 m^2/ 50.000 = 0,1 m^2 por persona o 10 personas por metro cuadrado.

En el caso de la opción B, cada persona ocupa un área de 1 metro cuadrado, mientras que para la opción C cada una ocupa un área de 5.000 m^2/20.000 = 0,25 m^2, por lo cual habría 4 personas por metro cuadrado.

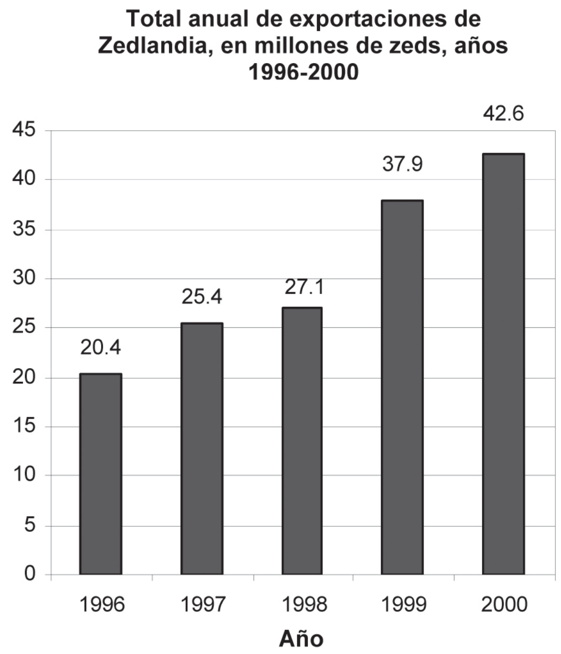
Es necesario volver a analizar la situación que propone el problema para decidir en cuál de los casos anteriores la respuesta es la más acertada. Se trata de un caso en el que no solo son necesarios conocimientos matemáticos para responder sino que además es preciso poner en juegos conocimientos prácticos, relativos a determinar cuántas personas es razonable que entren en un metro cuadrado de un estadio lleno.

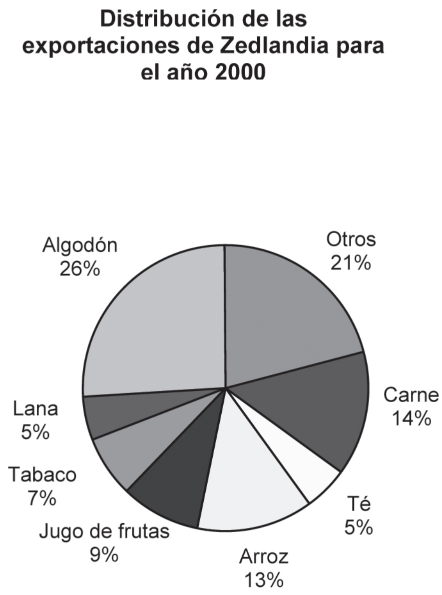
Si se pensara en resolver el problema en forma directa, resulta complejo para los alumnos entender que al tratarse de una estimación, hay datos que ellos mismos tienen que proponer. En este caso se trata de determinar la cantidad de personas que entran en un metro cuadrado de estadio lleno, pero claramente no se trata de un dato certero, absoluto, sino que puede haber diferentes respuestas.

Si los estudiantes comprenden esta falta de certeza, entonces no hay dudas de que cada posible respuesta tiene que cotejarse con las opciones, que se trata solo de una manera de seleccionar la respuesta más cercana a la estimación hallada.

Ejemplo 4: EXPORTACIONES

Los siguientes gráficos muestran información acerca de las exportaciones procedentes de Zedlandia, país que usa el el zed como unidad monetaria.





Pregunta 1: EXPORTACIONES

¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones procedentes de Zedlandia en 1998?

Pregunta 2: EXPORTACIONES

¿Cuál fue el valor del jugo de frutas exportado por Zedlandia el año 2000?

A 1,8 millones de zeds.

B 2,3 millones de zeds.

C 2,4 millones de zeds.

D 3,4 millones de zeds.

E 3,8 millones de zeds.

Pregunta 1: EXPORTACIONES

La primera pregunta requiere de la lectura de información que provee un gráfico de barras. El alumno podrá ubicar el año en el eje horizontal, para luego leer el valor de las exportaciones en la parte superior de la barra: 27 millones de zeds.

Se trata de una pregunta que sirve para que los alumnos necesiten explicitar qué datos están representados en el gráfico y de qué modo. Esta lectura es necesaria para responder las preguntas siguientes.

Pregunta 2: EXPORTACIONES

Como parte de la actividad necesaria para responder esta pregunta, los alumnos necesitan decidir qué gráfico utilizar como fuente de información.

El gráfico circular informa que se exportó el 9% en jugos de fruta, pero no se trata ese del valor de las exportaciones de jugo en el año 2000. A partir del gráfico de barras es posible saber que en el año 2000 se exportaron 42,6 millones de zeds en Zedlandia. El valor exportado en jugo de frutas es, entonces:

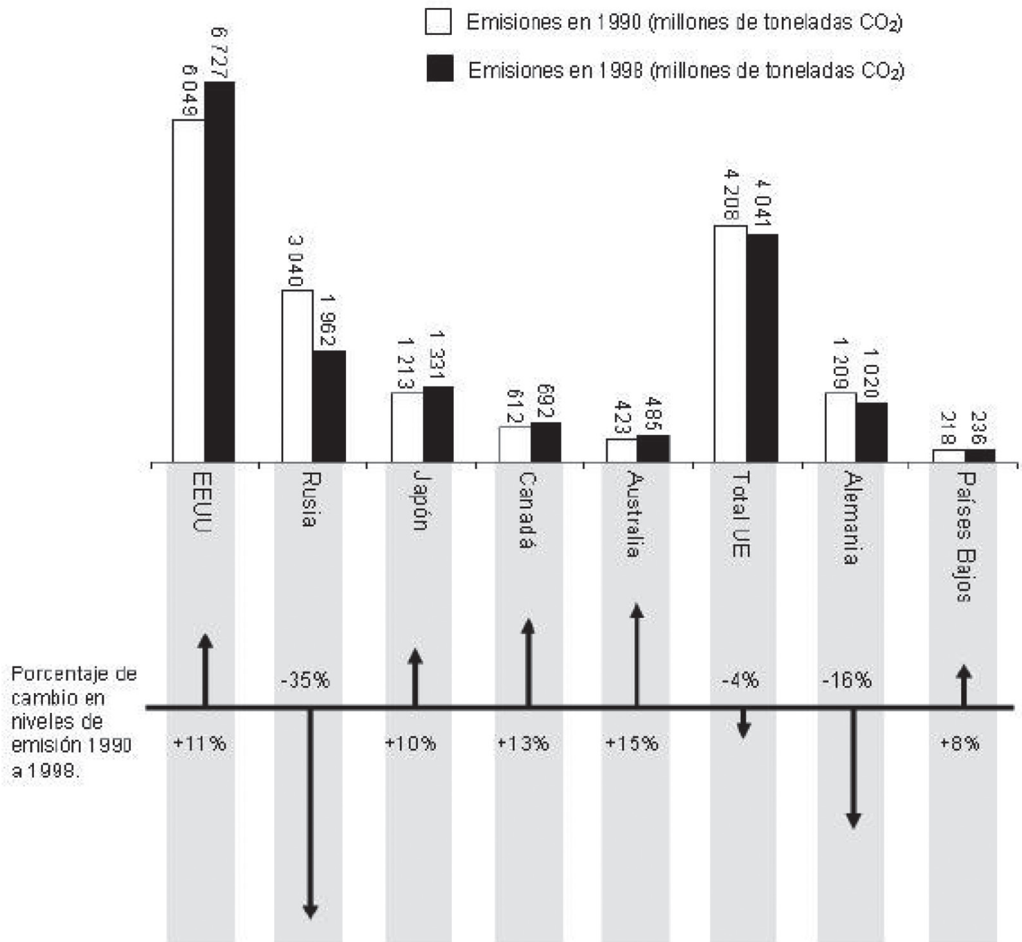
9% de 42,6 millones = 0,09. 42,6 millones = 3,834 millones

La dificultad que plantea esta pregunta consiste en tener que combinar la información proporcionada en dos gráficos diferentes para luego poder operar con ellas.

Ejemplo 5: DISMINUCIÓN DE LOS NIVELES DE CO_2

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de CO_2 en nuestra atmósfera sea la causa del cambio climático.

El siguiente diagrama muestra los niveles de emisión de CO_2 en 1990 (las barras blancas) para varios países (o regiones), los niveles de emisión de 1998 (las barras oscuras) y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes).



Pregunta 1: DISMINUCIÓN DE NIVELES DE CO_2

En el diagrama se puede leer que en EEUU, el aumento del nivel de emisión de CO_2 desde 1990 a 1998 fue del 11%.

Mostrá el cálculo de cómo obtener el 11%.

Pregunta 2: DISMINUCIÓN DE NIVELES DE CO_2

Amanda analizó el diagrama y afirma que descubrió un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: “El porcentaje de disminución en Alemania (16%) es mayor que el porcentaje de disminución en toda la Unión Europea (Total UE, 4%). Esto no es posible, porque Alemania es parte de la UE.”

¿Estás de acuerdo con Amanda cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Pregunta 3: DISMINUCIÓN DE NIVELES DE CO_2

Amanda y Nicolás conversaron sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento de emisiones de CO_2.

Cada uno de ellos llegó a una conclusión distinta basándose en el gráfico.

Da dos posibles respuestas ‘correctas’ a esta pregunta y explicá cómo llegaste a cada una de esas respuestas.

PREGUNTA 1: DISMINUCIÓN DE LOS NIVELES DE CO_2

El enunciado de esta pregunta le proporciona al alumno una lectura de datos que brinda el gráfico. Es decir que el aumento del nivel de emisión de CO_2 desde 1990 a 1998 en EEUU fue del 11%. Pero también afirma que con los demás datos disponibles es posible calcular este porcentaje.
Será tarea de los alumnos tomar las emisiones de CO_2 dadas para este país y buscar una manera de calcular el porcentaje de aumento.

Por ejemplo: $6727 - 6049 = 678$, $\frac{678}{6049} \times 100\% \approx 11\%$, $\frac{6727}{6049} \approx 1{,}11$.

PREGUNTA 2: DISMINUCIÓN DE LOS NIVELES DE CO_2

Esta pregunta tiene por objetivo poner en discusión, por un lado, los datos que brinda el gráfico del problema y, por el otro, analizar la veracidad de la afirmación dada.
Tal vez sea necesario poner en discusión la información que porta el gráfico como parte de un espacio colectivo. Es decir, en las cantidades de CO_2 emitidas en toda la UE se considera la suma de las cantidades emitidas en cada uno de los países que la componen. El 4% de disminución significa que la cantidad total emitida en 1998 es un 4% menor que la emitida en 1990.

En el caso de Alemania, la cantidad emitida en 1998 es un 16% menor que la emitida en 1990.
A pesar de que un porcentaje es mucho mayor en valor absoluto que el otro, esto es posible debido a que cuando se considera el total de toda la UE una gran disminución en la emisión de CO_2 para un país, puede ser mitigada por una disminución no tan marcada en otro país.
Es muy importante que la clase sea un espacio donde pueda darse un debate acerca de cómo explicar si una afirmación es o no verdadera en base a argumentos matemáticos. Pero además, es central dar un espacio para trabajar y discutir sobre las explicaciones, cuáles son más comprensibles, cuáles más completas, etc.

PREGUNTA 3: DISMINUCIÓN DE LOS NIVELES DE CO_2

En esta pregunta se da una información importante acerca del problema: hay dos casos correctos y diferentes en que hay mayor aumento de emisiones de CO_2.
No suele ser habitual que se presenten problemas que admiten dos soluciones correctas como en este caso, que refieren a casos apoyados en lógicas diferentes. En un caso se trata de usar argumentos basados en aumentos absolutos –el caso en que la emisión de CO_2 sufrió el mayor aumento-, mientras que en otro se analiza el mayor porcentaje de aumento –un aumento relativo-.
Cuando se consideran los aumentos absolutos, la tarea consiste en encontrar la mayor diferencia entre las emisiones en 1990 y 1998, lo cual se da para el caso de EEUU.
Al considerar aumentos relativos es necesario analizar los porcentajes de aumento de cada país en relación. El de mayor aumento es Australia con +15%.

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

DiNIECE
Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa